SUR LA NOTION DE DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION DE LIGNE*

PAR

MAURICE FRÉCHET

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

1. Avant d'étudier le cas particulier des fonctions de lignes, il m'a paru utile de montrer que la définition de la différentielle que je propose s'inspire de considérations générales applicables à une fonctionnelle quelconque. Je commence donc aux §§ 2, 3 par rappeler les points de vue de M. Volterra et de M. Hadamard. Ces auteurs se sont occupés uniquement de la dérivée des fonctionnelles telle qu'on l'entend dans le Calcul des Variations. Je pense qu'il y a lieu de définir d'abord la *différentielle* en généralisant la définition donnée par Stolz dans le cas d'une fonction ordinaire de plusieurs variables. J'arrive ainsi aux §§ 4, 5, 6, 7 à une définition générale de la différentielle des fonctionnelles qu'il suffit de préciser dans chaque cas particulier.

Je m'arrête ensuite au cas des fonctions de lignes et je déduis (§§ 8, 9) l'expression de la " variation " de celle de la différentielle. Cette différentielle est une fonctionnelle linéaire des accroissements des coordonnées des points

* Presented to the Society September 9, 1913.

de la courbe. Mais cette fonctionnelle linéaire n'est pas arbitraire et satisfait à une condition que j'obtiens aux §§ 10, 11.

Je mets ensuite la fonctionnelle linéaire sous la forme de somme d'intégrales de Stieltjes,—forme qui se déduit immédiatement d'un théorème de F. Riesz. On peut ainsi écrire explicitement (§§ 11, 12) la condition à laquelle j'ai fait allusion. Elle permet de mettre (§§ 13, 14, 15, 16) l'expression de la différentielle sous une forme qui n'est plus assujettie à aucune condition d'égalité —dans le cas où la courbe est rectifiable et à tangente continue—

$$\int_a^b (y_0' \Delta z - z_0' \Delta y)\, dp + \int_a^b (z_0' \Delta x - x_0' \Delta z)\, dq + \int_a^b (x_0' \Delta y - y_0' \Delta x)\, dr$$
$$+ A\Delta x(a) + B\Delta y(a) + C\Delta z(a) + A' \Delta x(b) + B' \Delta y(b) + C' \Delta z(b),$$

où p, q, r sont des fonctions à variation bornée quelconques, où A, B, C, A', B', C' sont des constantes quelconques et où les intégrales sont prises au sens de Stieltjes.

J'applique ensuite le mode de décomposition—que j'ai présenté ailleurs—d'une fonctionnelle linéaire, pour mettre en évidence (§§ 17, 18, 19, 20, 21, 22) des termes réguliers et irréguliers dans la différentielle d'une fonction de ligne.

Enfin, j'indique comment en suivant une méthode indiquée par M. Lebesgue on peut, en compliquant l'élément d'intégration, se passer des intégrales de Stieltjes (§§ 23–25). Toute cette théorie est établie en supposant que les seuls voisinages imposés soient d'ordre zéro au sens adopté en Calcul des Variations. Les résultats seraient un peu plus compliqués si l'on imposait aux voisinages d'être du premier ordre.

Aperçu historique

2. Le premier essai pour appliquer aux fonctionnelles les procédés du Calcul Différentiel semble être dû à M. Volterra. Le point de départ de sa méthode est la définition de la dérivée d'une fonctionnelle. Cette définition est l'extension de celle qui s'était imposée dans le Calcul des Variations. Dans le cas où l'argument de la fonctionnelle U_L est une ligne continue L plane par exemple, M. Volterra suppose que si l'on déforme un peu L au voisinage d'un point M de L, la variation de U_L ainsi produite est un infiniment petit d'ordre au moins égal à celui de l'aire balayée dans la déformation et que la limite du quotient ne dépend que de L et de M. Cette supposition se trouve être exacte dans les cas classiques du Calcul des Variations, au moins entre les extrémités de L; et elle conduit à la même formule pour la variation de U_L, soit une formule telle que

(1) $$\delta U_L = \int_L U_{L,x}\, \delta y dx$$

où $U_{L,x}$ dépend de la ligne L et du point de L d'abscisse x, mais non de la variation δy de l'ordonnée en ce point.

3. M. Volterra ne manqua pas de remarquer qu'une telle définition n'était pas entièrement satisfaisante, puisqu'elle laisse de côté une grande partie des expressions qui interviennent dans le Calcul des Variations, à savoir celles des variations des intégrales définies où les limites ne sont pas fixes. De telles variations comportent en effet, outre une intégrale définie de la forme (1), des termes finis aux limites. Il convint donc d'ajouter au second membre de (1) des termes qui dépendent, *d'une manière spéciale,* selon son expression, de certains points exceptionnels. En adoptant la définition de M. Volterra, on s'inspire des premierès applications qui se sont présentées et que M. Volterra a traitées avec un succés qui justifie pratiquement sa définition. Mais il était souhaitable au point de vue logique et pour assurer le développement futur de la théorie de déduire la définition d'un principe unique et général. M. Hadamard proposa donc de " considérer comme fonctionnelles auxquelles on peut étendre les méthodes du Calcul Infinitésimal, toutes les fonctionnelles U_y dont la variation est une fonctionnelle linéaire de la variation de y." (La définition d'une fonctionnelle linéaire sera donnée plus tard (§ 6)).

4. Je me propose de poursuivre encore plus loin la critique de M. Hadamard. Notons d'abord en passant qu'une fonctionnelle linéaire peut comporter encore un terme d'une nature différente des deux termes mentionnés plus haut (intégrale et terme fini); nous retrouverons cette remarque au § 7. Mais surtout observons que la première chose à faire pour appliquer au Calcul Fonctionnel les méthodes du Calcul Infinitésimal, c'est de définir la *différentielle* et d'en tirer seulement comme conséquence l'expression de la *variation.* On comprendra notre pensée en l'appliquant au cas des fonctions ordinaires de plusieurs variables numériques. C'est en effet seulement après avoir défini la différentielle totale de telles fonctions qu'il y a lieu de donner la règle de dérivation des fonctions composées.

Nous serons donc conduit à essayer de définir d'abord la notion de différentielle, et pour cela à nous poser deux questions: Quelle doit être la forme de la différentielle? De quelle manière doit elle se déduire de la fonctionnelle donnée? La réponse à la première question nous est fournie par la remarque de M. Hadamard que le résultat fondamental du Calcul Différentiel est le suivant: " La différentielle d'une fonction est une fonction linéaire des différentielles des variables." Nous supposerons donc que la différentielle d'une fonctionnelle est une fonctionnelle linéaire—nous préciserons plus loin (§ 6) le sens de cette expression—de l'accroissement de l'argument. La remarque de M. Hadamard suffirait si nous désirions seulement arriver à une définition de la " variation." Car la réponse à la seconde question est contenue dans la définition de la variation: c'est la dérivée par rapport à α de la fonction de α qui est la valeur

de la fonctionnelle quand l'argument dépend aussi de α. Mais la réponse est moins immédiate quand nous voulons arriver à définir une différentielle totale. Ici les dérivées partielles n'ont plus d'analogues. J'ai donc été amené à essayer de reprendre l'ancienne définition aujourd'hui généralement abandonnée: la différentielle est la partie principale de l'accroissement de la fonction quand l'accroissement de la variable est considéré comme infiniment petit.

Cas des fonctions ordinaires de plusieurs variables

5. Il faut bien remarquer en effet que si cette ancienne définition—qui est la première en date, la plus naturelle et la plus commode—a prêté à des objections très fondées, c'est qu'elle a été mal formulée. Tout au contraire, c'est à elle que sont revenus des auteurs désireux de plus de rigueur dans la théorie des fonctions de plusieurs variables. MM. Stolz,* Pierpont,† W. H. Young,‡ formulent ainsi la définition de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables:

Une fonction $f(x, y)$ admet une différentielle totale au point x_0, y_0 si (1) $f(x, y)$ admet en ce point des dérivées partielles en x et en y, *et si* (2) *on a, quels que soient les accroissements* Δx, Δy,

$$(2)\quad f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x_0} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y_0} + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

ϵ_1 et ϵ_2 tendant vers zéro quand Δx, Δy tendent simultanément vers zéro. Cette différentielle est alors

$$\Delta x \frac{\partial f}{\partial x_0} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y_0}.$$

Sans connaître cette nouvelle définition, j'ai été amené en appliquant les idées exposées plus haut à la définition suivante qui lui est entièrement équivalente mais dont la forme se rapproche plus de la définition historique:

Une fonction $f(x, y)$ admet au point x_0, y_0 une différentielle totale s'il existe une fonction linéaire des accroissements des variables, soit $A\Delta x + B\Delta y$, qui ne diffère de l'accroissement de la fonction que par un infiniment petit relativement à la distance $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ du point x_0, y_0 au point voisin $x_0 + \Delta x$, $y_0 + \Delta y$. Au lieu de $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, il est équivalent de prendre $|\Delta x| + |\Delta y|$, de sorte que d'après ma définition

$$(3)\qquad \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - [A\Delta x + B\Delta y]}{|\Delta x| + |\Delta y|} = \epsilon,$$

ϵ tendant vers zéro avec $|\Delta x| + |\Delta y|$. Il est facile de voir que dans ce

* *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung*, t. 1, p. 133.

† *The Theory of Functions of Real Variables*, t. 1, p. 268.

‡ *The Fundamental Theorems of Differential Calculus.*

cas, on a $A = \partial f / \partial x_0$, $B = \partial f / \partial y_0$ et que la formule (3) est équivalente à la formule (2) de Stolz.

M. W. H. Young a, le premier, nettement montré les simplifications que procurent la définition nouvelle.* J'ai moi-même repris et complété cette exposition.† De sorte que je pourrai admettre ici comme établie la supériorité de la définition de Stolz sur la définition ordinaire (où l'on omet généralement la condition (2) de Stolz).

Différentielle d'une fonctionelle

6. Il nous faut maintenant revenir à la définition de la différentielle d'une fonctionnelle. J'ai d'abord considéré dans les Comptes Rendus du Congrès des Sociétés Savantes (Paris, 1912, p. 44) le cas des fonctionnelles dont l'argument est une fonction continue. Je rappelle brièvement les définitions et théorèmes concernant ce cas et qui nous serviront dans la suite.

Une fonctionnelle linéaire est une fonctionnelle distributive et continue. Dans le cas actuel:

Une fonctionnelle U_f définie dans le champ C des fonctions $f(x)$ continues dans (a, b) est continue dans ce champ si U_{f_n} tend vers U_f lorsque $f_n(x)$ converge *uniformément* vers $f(x)$.

Elle est distributive si l'on a identiquement $U_{f_1+f_2} = U_{f_1} + U_{f_2}$. Nous dirons qu'une fonctionnelle U_f définie dans la champ C a une différentielle pour l'argument f_0 s'il existe une fonctionnelle linéaire $T_{\Delta f}$ de l'accroissement Δf de l'argument, qui ne diffère de l'accroissement de la fonctionnelle U_f que par une quantité infiniment petite par rapport au maximum de la valeur absolue de l'accroissement $\Delta f(x)$ dans (a, b). En appelant $m\Delta f$ ce maximum, on aura donc

$$U_{f+\Delta f} = U_f + T_{\Delta f} + \epsilon m\Delta f, \tag{4}$$

ϵ tendant vers zéro avec $m\Delta f$.

Diverses formes des fonctionnelles linéaires

7. Quant à la forme des fonctionnelles linéaires, on peut facilement prévoir l'existence de deux types différents parmi ces fonctionnelles, l'un tel que

$$\int_a^b f(x)\,\alpha(x)\,dx \tag{5}$$

où $\alpha(x)$ est une fonction sommable‡ quelconque, indépendante de l'argument

* Loc. cit.

† Nouvelles Annales de Mathématiques, 4[e] série, t. 12 (1912), pp. 385, 433.

‡ Dans tout le cours de cet article, les intégrales ordinaires seront prises au sens de M. Lebesgue.

$f(x)$; l'autre pouvant s'écrire

$$\sum_n A_n f(c_n) \tag{6}$$

où les A et c sont des constantes indépendantes de l'argument $f(x)$ de la fonctionnelle, où les c sont entre a et b, et la série ΣA_n est absolument convergente. Mais il existe des fonctionnelles linéaires qui n'appartiennent à aucun de ces deux types.

La représentation générale d'une fonctionnelle linéaire *quelconque* U_f peut s'effectuer sous les trois formes équivalentes suivantes. D'après M. Hadamard, on peut écrire

$$U_f = \lim_{n=\infty} \int_a^b f(x)\, \alpha_n(x)\, dx, \tag{7}$$

où les $\alpha_n(x)$ sont des fonctions indépendantes de $f(x)$, qui peuvent être continues et qu'on peut même astreindre à être des polynomes. D'après M. Lebesgue, on a

$$U_f = \int_a^b f[\varphi(x)]\, \beta(x)\, dx, \tag{8}$$

où $\varphi(x)$ et $\beta(x)$ sont des fonctions indépendantes de l'argument f, $\varphi(x)$ étant une fonction non décroissante et $\beta(x)$ une fonction sommable qui prend seulement les valeurs ± 1. Enfin la représentation qui paraît la plus commode, puisqu'elle détermine la fonctionnelle au moyen d'une seule fonction ordinaire $u(x)$, est celle de M. F. Riesz,

$$U_f = \int_a^b f(x)\, d[u(x)], \tag{9}$$

où $u(x)$ est une fonction à variation bornée et où l'intégrale est prise au sens de Stieltjes. C'est à dire que l'on a

$$U_f = \lim \sum_i f(\xi_i)\, [u(x_i) - u(x_{i-1})], \tag{10}$$

où l'on a pris arbitrairement les x et ξ tels que $a = x_0 \leqq \xi_1 \leqq x_1 \leqq \xi_2 \leqq \cdots \leqq \xi_n \leqq x_n = b$ et où l'on fait tendre vers zéro la longueur maximum des intervalles (x_{i-1}, x_i).

Il faut bien remarquer cependant que si l'on veut se rendre compte de la structure d'une fonctionnelle linéaire, il n'est pas nécessaire d'employer l'intégrale de Stieltjes sous sa forme la plus générale, c'est à dire en prenant pour $u(x)$ une fonction quelconque à variation bornée. J'ai montré en effet* que toute fonctionnelle linéaire peut se mettre *et d'une seule* manière sous la forme d'une somme de trois fonctionnelles linéaires de types essentiellement

* M. Fréchet, *Sur la Notion de Différentielle dans le Calcul Fonctionnel*, Comptes Rendus du Congrès des Sociétés Savantes (Grenoble, 1913).

différents et représentables sous les formes respectives (5), (6) et (9), où la fonction $u(x)$ qui figure dans (9) doit non seulement être à variation bornée mais encore posséder une dérivée nulle presque partout (c'est à dire sauf en un ensemble de points de mesure nulle). Un exemple de ce troisième type nous est fourni par la fonctionnelle

$$U_f = \lim_{\text{mesure } S_E = 0} \left[\frac{\int_{S_E} f(x)\, dx}{\int_{S_E} dx} \right]$$

où S_E est un ensemble dénombrable d'intervalles non empiétant et couvrant l'ensemble parfait de mesure nulle E.

Différentielles des fonctions de lignes continues

8. J'appellerai *ligne continue* toute suite ordonnée de points équivalente au point de vue de l'Analysis Situs à un segment de droite et par conséquent représentable sous la forme

$$(L) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t), \qquad a \leqq t \leqq b,$$

où f, g, h sont trois fonctions arbitraires uniformément continues dans (a, b) et qui ne sont à la fois constantes dans aucun intervalle de valeurs de t.

Si à toute ligne continue L correspond un nombre bien déterminé U_L, on dit que U_L est une fonction de ligne.

9. On voit que la donnée d'une ligne équivaut à celle d'un ensemble de trois fonctions continues de sorte que les définitions de la continuité et de la différentiation d'une fonction de ligne se déduisent immédiatement des définitions correspondantes pour les fonctionnelles dont l'argument est une seule fonction continue dans (a, b). Il est bon cependant de les énoncer explicitement pour éviter tout malentendu.

Une fonctionnelle $U_{f,\, g,\, h}$ dépendant de trois fonctions $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ uniformément continues dans (a, b) est continue en (f_0, g_0, h_0) si $U_{f,\, g,\, h}$ tend vers $U_{f_0,\, g_0,\, h_0}$ de quelque manière que f, g, h convergent uniformément et *simultanément* vers f_0, g_0, h_0. Elle est distributive si l'on a identiquement

$$U_{f+f_1,\, g+g_1,\, h+h_1} \equiv U_{f,\, g,\, h} + U_{f_1,\, g_1,\, h_1}.$$

Enfin la fonctionnelle $U_{f,\, g,\, h}$ admet une différentielle en (f_0, g_0, h_0) s'il existe une fonctionnelle $T_{\Delta f,\, \Delta g,\, \Delta h}$ linéaire par rapport à l'ensemble des accroissements Δf, Δg, Δh des arguments, qui ne diffère de l'accroissement de la fonctionnelle que par une quantité infiniment petite par rapport à l'ensemble des accroissements Δf, Δg, Δh. Pour préciser, nous supposons

$$(11) \qquad \frac{U_{f_0+\Delta f,\, g_0+\Delta g,\, h_0+\Delta h} - U_{f_0,\, g_0,\, h_0} - T_{\Delta f,\, \Delta g,\, \Delta h}}{m\Delta f + m\Delta g + m\Delta h} = \epsilon,$$

$m\Delta f$, $m\Delta g$, $m\Delta h$ désignant les maxima dans (a, b) des valeurs absolues $|\Delta f|$, $|\Delta g|$, $|\Delta h|$, et ϵ tendant vers zéro quand la somme de ces maxima tend vers zéro. On peut aussi remplacer le dénominateur par $m\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$; la définition n'en est pas altérée.

Nous pouvons maintenant remarquer que, si $V_{f,\, g,\, h}$ est une fonctionnelle linéaire par rapport à l'ensemble (f, g, h), c'est la somme de trois fonctionnelles linéaires dépendant chacune d'une seule des fonctions f, g, h. Car on a

$$V_{f,\, g,\, h} = V_{f,\, 0,\, 0} + V_{0,\, g,\, 0} + V_{0,\, 0,\, h}\,.$$

Si maintenant on décompose ainsi la différentielle $T_{\Delta f,\, \Delta g,\, \Delta h}$ d'une fonctionnelle $U_{f,\, g,\, h}$ en trois fonctionnelles linéaires

$$T_{\Delta f,\, \Delta g,\, \Delta h} = \mathscr{T}^{(f)}_{\Delta f} + \mathscr{T}^{(g)}_{\Delta g} + \mathscr{T}^{(h)}_{\Delta h}\,, \tag{12}$$

la formule (11) montre immédiatement que la fonctionnelle $U_{f,\, g,\, h}$ admet respectivement ces trois fonctionnelles comme différentielles par rapport à f seul, g seul, ou h seul. Mais la réciproque n'est pas vraie.

Expression de la variation

10. Nous pouvons passer maintenant au calcul de la "variation" de la fonctionnelle $U_{f,\, g,\, h}$. Supposons que f, g, h soient fonctions non seulement de la variable t, mais d'un paramètre α. Alors U sera lui-même une fonction de α

$$F(\alpha) = U_{f(t,\, \alpha),\, g(t,\, \alpha),\, h(t,\, \alpha)}\,.$$

Si pour $\alpha = \alpha_0$, $f(t, \alpha)$, $g(t, \alpha)$, $h(t, \alpha)$ se réduisent à $f_0(t)$, $g_0(t)$, $h_0(t)$, la variation de U pour f_0, g_0, h_0 sera la différentielle de F par rapport à α pour $\alpha = \alpha_0$. Pour pouvoir calculer cette variation, il va falloir faire certaines hypothèses sur $f(t, \alpha)$, $g(t, \alpha)$, $h(t, \alpha)$. En effet dans le cas classique et plus simple où $g \equiv h \equiv 0$ et où

$$U_{f(t,\, \alpha)} = \int_a^b f(t, \alpha)\, dt\,,$$

on a déjà à introduire ces hypothèses. On suppose généralement que $f(t, \alpha)$ est dérivable par rapport à α pour $\alpha = \alpha_0$ et que $[f(t, \alpha) - f(t, \alpha_0)]/(\alpha - \alpha_0)$ converge uniformément vers $\partial f/\partial \alpha_0$ quand α tend vers α_0. *Nous ferons donc cette hypothèse pour $f(t, \alpha)$ ainsi que pour $g(t, \alpha)$ et $h(t, \alpha)$. Elle nous suffira en supposant bien entendu que $U_{f,\, g,\, h}$ admet une différentielle pour* f_0, g_0, h_0. On aura en effet d'après (11) et (12)

$$\frac{F(\alpha)-F(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0} = \mathcal{T}^{(f_0)}_{\frac{f(t,\alpha)-f(t,\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}} + \mathcal{T}^{(g_0)}_{\frac{g(t,\alpha)-g(t,\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}} + \mathcal{T}^{(h_0)}_{\frac{h(t,\alpha)-h(t,\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}}$$
$$+ \epsilon\left\{m\left[\frac{f(t,\alpha)-f(t,\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}\right] + m\left[\frac{g(t,\alpha)-g(t,\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}\right]\right.$$
$$\left. + m\left[\frac{h(t,\alpha)-h(t,\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}\right]\right\}.$$

D'après les hypothèses faites $\partial f/\partial\alpha_0$, $\partial g/\partial\alpha_0$, $\partial h/\partial\alpha_0$ sont des fonctions continues, et le second membre de l'équation précédente tendra vers

$$\mathcal{T}^{(f_0)}_{\frac{\delta f}{\delta\alpha_0}} + \mathcal{T}^{(g_0)}_{\frac{\delta g}{\delta\alpha_0}} + \mathcal{T}^{(h_0)}_{\frac{\delta h}{\delta\alpha_0}}.$$

Donc $F(\alpha)$ a une dérivée en α_0 et cette dérivée est $T_{\delta f/\delta\alpha_0,\, \delta g/\delta\alpha_0,\, \delta h/\delta\alpha_0}$.

Avec les notations ordinaires du Calcul des Variations:

$$\delta U_{f_0,\, g_0,\, h_0} = T_{\delta f_0,\, \delta g_0,\, \delta h_0}$$

ou encore

(13) $$\delta U_L = T_{\delta x,\, \delta y,\, \delta z}.$$

Autrement dit, *on obtient, sous les conditions indiquées plus haut, la " variation " d'une fonction de ligne en remplaçant dans l'expression de sa différentielle les accroissements des coordonnées par leurs variations.*

La différentielle d'une fonction de ligne n'est pas une fonctionnelle linéaire arbitraire des accroissements des coordonnées

11. Si tout système de fonctions f, g, h continues et non à la fois constantes définit bien une courbe L, la réciproque n'est pas vraie; tous les systèmes obtenus en faisant dans f, g, h une substitution de la forme $t = \theta(t')$, où $\theta(t')$ est une fonction continue de t' qui croît de la valeur a à la valeur b quand t croît de a à b définit la même courbe L. On peut donc s'attendre à ce que, pour une ligne L_0 déterminée, la différentielle de U ne soit pas une fonctionnelle linéaire quelconque des Δf, Δg, Δh. C'est ce que nous allons montrer. Bornons-nous pour simplifier au cas très général où la courbe L_0 est rectifiable et a partout une tangente variant continuement, c'est à dire, où $f_0(t)$, $g_0(t)$, $h_0(t)$ ont des dérivées uniformément continues dans (a, b) et telles que $f_0'^2 + g_0'^2 + h_0'^2$ reste différent de zéro; et appliquons la formule (13) lorsqu'on prend pour ligne variée la ligne L_0 elle-même. Considérons dans ce but une fonction $\varphi(t)$ continue entre a et b, nulle en a et b, et admettant une dérivée continue dans (a, b). Pour λ assez petit, la fonction $\theta(t) = t + \lambda\varphi(t)$ est continue et croît de a à b quand t varie de a à b. Dès lors la courbe

$$x = f_0[\theta(t)], \qquad y = g_0[\theta(t)], \qquad z = h_0[\theta(t)]$$

représente la même courbe L_0, et les seconds membres convergent uniformément vers $f_0(t)$, $g_0(t)$, $h_0(t)$ quand λ tend vers zéro. Mais de plus $\{f_0[\theta(t)]-f_0(t)\}/\lambda$, $\{g_0[\theta(t)]-g_0(t)\}/\lambda$, $\{h_0[\theta(t)]-h_0(t)\}/\lambda$ convergeront uniformément vers $\varphi(t)f_0'(t)$, $\varphi(t)g_0'(t)$, $\varphi(t)h_0'(t)$; nous aurons donc le droit d'appliquer la formule (13) où δU sera évidemment nul et nous aurons donc

$$T_{\phi f_0', \phi g_0', \phi h_0'} = 0. \tag{14}$$

Ainsi le fait que la fonctionnelle U est une fonction de ligne se traduit par l'égalité (14) qui a lieu quelle que soit la fonction $\varphi(t)$ nulle aux extrémités et à dérivée continue.

12. Pour mettre cette condition (14) sous une forme indépendante de la fonction arbitraire $\varphi(t)$, nous utiliserons la représentation (9) des fonctionnelles linéaires due à M. F. Riesz. La fonctionnelle T est la somme de trois fonctionnelles linéaires et pourra donc s'écrire

$$T_{\Delta f, \Delta g, \Delta h} = \int_a^b \Delta f(t)\, d[u(t)] + \int_a^b \Delta g(t)\, d[v(t)] + \int_a^b \Delta h(t) d[w(t)], \tag{15}$$

u, v, w désignant trois fonctions à variation bornées qui ne dépendent que de f_0, g_0, h_0, U. On aura donc

$$0 = \int_a^b \varphi(t) f_0'(t) d[u(t)] + \int_a^b \varphi(t) g_0'(t) d[v(t)] + \int_a^b \varphi(t) h_0'(t) d[w(t)]. \tag{14'}$$

Posons

$$F(t) = \int_a^t f_0'(t)\, d[u(t)].$$

Pour étudier ses discontinuités, introduisons la variation totale $U(t)$ de $u(t)$ dans (a, b) et le maximum $\Omega(\epsilon)$ de l'oscillation de la fonction continue $f_0'(t)$ dans tout intervalle de longueur $\leqq \epsilon$. On aura évidemment

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_0'(t)\, d[u(t)] &= \lim \Sigma f_0'(\xi_j')[u(t_j') - u(t_{j-1}')] \\ &= \lim \{ \Sigma [f_0'(\xi_j') - f_0'(\xi)][u(t_j') - u(t_{j-1}')] \\ &\qquad + f_0'(\xi) \Sigma [u(t_j') - u(t_{j-1}')]\} \end{aligned} \tag{16}$$

si $t_{i-1} = t_0' \leqq \xi_1' \leqq t_1' \leqq \cdots \leqq t_n' = t_i$ et $t_{i-1} \leqq \xi \leqq t_i$. D'où

$$\left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_0'(t)\, d[u(t)] - f_0'(\xi)[u(t_i) - u(t_{i-1})] \right| \leqq \Omega(\epsilon) |U(t_i) - U(t_{i-1})|, \tag{17}$$

ϵ étant supérieur ou égal à la longueur de l'intervalle $(t_i - t_{i-1})$. Si maintenant on fait tendre t_{i-1} vers $t' = t_i$ par valeurs plus petites ou t_i vers $t' = t_{i-1}$ par valeurs plus grandes, on voit qu'on aura

$$F(t' \pm 0) - F(t') = f_0'(t')[u(t' \pm 0) - u(t)]. \tag{18}$$

D'autre part, l'égalité (16) donne évidemment

$$\Sigma \mid F(t_i) - F(t_{i-1}) \mid \leqq M \cdot U(b),$$

M étant le maximum de $f'_0(t)$ dans (a, b). Donc $F(t)$ est à variation bornée dans (a, b). Par suite, on peut écrire

$$\int_a^b \varphi(t) f'_0(t)\, d[u(t)] = \int_a^b \varphi(t)\, d[F(t)], \tag{19}$$

car le second membre a un sens et le premier est, d'après (17), la limite de

$$\begin{aligned}\Sigma\varphi(\xi_i) f'_0(\xi_i)[u(t_i) - u(t_{i-1})] = \Sigma\varphi(\xi_i)[F(t_i) - F(t_{i-1})]& \\ + \theta q \Omega(\epsilon_0)\, U(b)&,\end{aligned} \tag{20}$$

avec $|\theta| < 1$, ϵ_0 représentant la longueur du plus grand des intervalles $(t_i - t_{i-1})$, et q le maximum de $\varphi(t)$. Or le second membre de (20) tend vers le second membre de (19) quand ϵ_0 tend vers zero.

Ceci étant, posons

$$K(t) = \int_a^t x'_0(t)\, d[u(t)] + \int_a^t y'_0(t)\, d[v(t)] + \int_a^t z'_0(t)\, d[w(t)] \tag{21}$$

en ecrivant x_0, y_0, z_0 pour f_0, g_0, h_0. On verra comme pour $F(t)$ que c'est une fonction à variation bornée et que l'égalité (14') peut s'écrire

$$\int_a^b \varphi(t)\, d[K(t)] = 0.$$

Or on voit facilement que

$$\int_a^b \varphi(t)\, d[K(t)] = [\varphi(t) K(t)]_a^b - \int_a \varphi'(t) K(t)\, dt,$$

et puisque $\varphi(b) = \varphi(a) = 0$, l'égalité (14') est finalement équivalente à

$$\int_a^b \varphi'(t) K(t)\, dt = 0.$$

Cette condition, vérifiée quelle que soit la fonction $\varphi(t)$ nulle aux extrémités et à dérivée continue, ne peut être satisfaite si $K(t)$ est arbitraire. Remarquons d'abord qu'au moyen d'un changement de variable simple, on peut supposer $a = 0$, $b = 2\pi$ et qu'alors on aura le droit de prendre pour $\varphi(\theta)$, θ étant la nouvelle variable, l'une des fonctions

$$\sin n\theta, \qquad \cos n\theta - 1$$

et par suite pour $\varphi'(t)$ l'une des fonctions

$$n \cos n\theta, \qquad -n \sin n\theta,$$

n étant un entier quelconque. Si donc $n \neq 0$, on aura

$$\int_0^{2\pi} K_1(\theta) \cos n\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} K_1(\theta) \sin n\theta \, d\theta = 0 \quad (n = 1, 2, 3 \cdots),$$

où $K_1(\theta) = K(t)$. La série de Fourier de $K_1(\theta)$ se réduit donc à une constante, et d'autre part, on sait que la série de Fourier d'une fonction à variation bornée $K_1(\theta)$ converge partout vers $K_1(\theta)$ sauf peut-être aux points de discontinuité de $K_1(\theta)$ qui forment un ensemble dénombrable.

En revenant à la variable primitive t, on voit donc que $K(t)$ est égal en tout point de (a, b) à une constante déterminée k, sauf peut-être aux points d'un certain ensemble dénombrable N. Il est d'ailleurs facile de déterminer N. En raisonnant pour $K(t)$ comme pour $F(t)$, on obtient en effet l'égalité analogue à (18),

$$K(t \pm 0) - K(t) = x_0'(t)[u(t \pm 0) - u(t)] + \cdots + z_0'(t)[w(t \pm 0) - w(t)]. \tag{22}$$

Par suite $K(t)$ ne peut être discontinue qu'aux points où l'une des fonctions u, v, w est discontinue.

Ainsi lorsque la fonction de ligne U_L admet une différentielle pour une ligne $L_0[x_0(t), y_0(t), z_0(t)]$ à tangente continue, si l'on met cette différentielle sous la forme

$$\int_a^b \Delta x(t) \, d[u(t)] + \cdots + \int_a^b \Delta z(t) \, d[w(t)], \tag{23}$$

les fonctions à variation bornée u, v, w ne peuvent être arbitraires; elles vérifient nécessairement l'égalité

$$\int^t x_0'(t) \, d[u(t)] + \cdots + \int_a^t z_0'(t) \, d[w(t)] = \textit{constante} \tag{24}$$

en tout point t de (a, b)—sauf peut-être en un ensemble dénombrable de points qui ne peuvent être que des points de discontinuité de u, v ou w.

Forme explicite de la différentielle

13. La forme (23) de la différentielle est très utile en ce sens qu'elle détermine la différentielle seulement au moyen de trois fonctions u, v, w, et que réciproquement ces trois fonctions sont déterminées par la différentielle—du moins, d'après F. Riesz, à un changement près de leur valeur en un ensemble dénombrable de points autres que a et b. Mais elle a l'inconvénient que ces trois fonctions u, v, w soient assujetties à la condition (24). Nous allons donner une autre expression de la différentielle où les fonctions qui déterminent la différentielle sont des fonctions à variation bornée choisies arbitrairement.

Nous avons supposé que x_0', y_0', z_0' sont des fonctions continues de t et que $x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2$ a un minimum positif h. Par suite les expressions

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \int_a^t \frac{y_0'(t)}{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2} d[w(t)] - \int_a^t \frac{z_0'(t)}{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2} d[v(t)]; \\
(25) \quad q(t) &= \int_a^t \frac{z_0'(t)}{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2} d[u(t)] - \int_a^t \frac{x_0'(t)}{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2} d[w(t)]; \\
r(t) &= \int_a^t \frac{x_0'(t)}{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2} d[v(t)] - \int_a^t \frac{y_0'(t)}{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2} d[u(t)]
\end{aligned}
$$

sont calculables comme intégrales de Stieltjes. De plus, en raisonnant comme au § 12 pour la fonction $F(t)$, on voit que p, q, r sont des fonctions à variation bornée dans (a, b). Ceci étant, calculons la différence

$$
\begin{aligned}
\delta = \int_a^b \Delta x(t)\, d[u(t)] + \int_a^b \Delta y(t)\, d[v(t)] + \int_a^b \Delta z(t)\, d[w(t)] \\
- \int_a^b [y_0'(t)\Delta z(t) - z_0'(t)\Delta y(t)]\, d[p(t)] \\
- \int_a^b [z_0'(t)\Delta x(t) - x_0'(t)\Delta z(t)]\, d[q(t)] \\
- \int_a^b [x_0'(t)\Delta y(t) - y_0'(t)\Delta x(t)]\, d[r(t)].
\end{aligned}
$$

C'est une somme algébrique d'intégrales de Stieltjes et c'est par suite la limite de trois termes tels que

$$
(26) \quad \begin{aligned}
\sum_i \Delta x(\xi_i)\{[u(t_i) - u(t_{i-1})] + y_0'(\xi_i)[r(t_i) - r(t_{i-1})] \\
- z_0'(\xi_i)[q(t_i) - q(t_{i-1})]\}.
\end{aligned}
$$

L'accolade peut s'écrire

$$
(27) \quad \begin{aligned}
u(t_i) - u(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{x_0'(t)x_0'(\xi_i) + y_0'(t)y_0'(\xi_i) + z_0'(t)z_0'(\xi_i)}{x_0'^2(t) + y_0'^2(t) + z_0'^2(t)} d[u(t)] \\
+ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{x_0'(t)}{x_0'^2(t) + y_0'^2(t) + z_0'^2(t)} \{x_0'(\xi_i)\, d[u(t)] + y_0'(\xi_i)\, d[v(t)] \\
+ z_0'(\xi_i)\, d[w(t)]\}.
\end{aligned}
$$

D'autre part, remarquons que si l'on prend pour t_{i-1} et t_i des points où u, v, w sont continues, on aura d'après (24)

$$
\int_{t_{i-1}}^{t_i} x_0'(t)\, d[u(t)] + \int_{t_{i-1}}^{t_i} y_0'(t)\, d[v(t)] + \int_{t_{i-1}}^{t_i} z_0'(t)\, d[w(t)] = 0.
$$

Retranchons de (27) cette expression multipliée par

$$x_0'(\xi_i)/[x_0'^2(\xi_i)+y_0'^2(\xi_i)+z_0'^2(\xi_i)].$$

L'expression (27) peut donc s'écrire

$$(28)\quad \begin{aligned} &\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\{\frac{x_0'(t)[x_0'(t)-x_0'(\xi_i)]+y_0'(t)[y_0'(t)-y_0'(\xi_i)]+z_0'(t)[z_0'(t)-z_0'(\xi_i)]}{x_0'^2(t)+y_0'^2(t)+z_0'^2(t)}\right\}d[u(t)]\\ &+\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[\frac{x_0'(t)\,x_0'(\xi_i)}{x_0'^2(t)+y_0'^2(t)+z_0'^2(t)}-\frac{x_0'(t)\,x_0'(\xi_i)}{x_0'^2(\xi_i)+y_0'^2(\xi_i)+z_0'^2(\xi_i)}\right]du\\ &+\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[\frac{x_0'(t)\,y_0'(\xi_i)}{x_0'^2(t)+y_0'^2(t)+z_0'^2(t)}-\frac{y_0'(t)\,x_0'(\xi_i)}{x_0'^2(\xi_i)+y_0'^2(\xi_i)+z_0'^2(\xi_i)}\right]dv\\ &+\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[\frac{x_0'(t)\,z_0'(\xi_i)}{x_0'^2(t)+y_0'^2(t)+z_0'^2(t)}-\frac{z_0'(t)\,x_0'(\xi_i)}{x_0'^2(\xi_i)+y_0'^2(\xi_i)+z_0'^2(\xi_i)}\right]dw.\end{aligned}$$

Soit maintenant M le plus grand maximum de $|x_0'(t)|$, $|y_0'(t)|$, $|z_0'(t)|$ dans (a, b); $\omega(\epsilon)$ la plus grande oscillation de $x_0'(t)$, $y_0'(t)$, $z_0'(t)$ dans un intervalle de longueur au plus égale à la plus grande longueur ϵ des intervalles (t_{i-1}, t_i); $U(t)$, $V(t)$, $W(t)$ les variations totales de u, v, w dans (a, t). D'après la définition des intégrales de Stieltjes, on a en général

$$\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} x(t)\,d[u(t)]\right| \leqq [\text{maximum de } |x(t)| \text{ dans } (t_{i-1}, t_i)] \times [U(t_i)-U(t_{i-1})].$$

En appliquant une formule analogue à chacune des intégrales que nous venons d'écrire, on voit que la valeur absolue de l'expression (27) est au plus égale à

$$\frac{3M\omega(\epsilon)}{h}[U(t_i)-U(t_{i-1})]+\frac{6M^3\omega(\epsilon)}{h^2}[U(t_i)-U(t_{i-1})] + \frac{11M^3\omega(\epsilon)}{h^2}[V(t_i)-V(t_{i-1})]+\frac{11M^3\omega(\epsilon)}{h^2}[W(t_i)-W(t_{i-1})].$$

Ceci ne s'applique que si t_i et t_{i-1} ne sont pas de points de discontinuité de u, v ou w. Si l'on suppose d'abord que a et b ne sont pas de tels points de discontinuité, on pourra s'arranger pour que tous les t_i soient ainsi choisis et la valeur absolue de la somme des trois termes analogues à (26) sera au plus égale à

$$N\left[\frac{3M\omega(\epsilon)}{h}+\frac{6M^3\omega(\epsilon)}{h^2}+\frac{22M^3\omega(\epsilon)}{h^2}\right][U(b)+V(b)+W(b)]=\omega(\epsilon)\times K$$

où N désigne le plus grand des maxima de $|\Delta x(t)|$, $|\Delta y(t)|$, $|\Delta z(t)|$

dans (a, b), et K un nombre fixe. Quand ϵ tend vers zéro, $\omega(\epsilon) \times K$ tend vers zéro. Donc δ serait nulle. Mais il peut arriver que u, v ou w soit discontinu en a ou b. Alors nous aurons seulement prouvé que l'on a

$$\delta = \lim_{\epsilon=0} \sum_i \left[\frac{\Delta x(\xi_i)\, x_0'(\xi_i) + \Delta y(\xi_i)\, y_0'(\xi_i) + \Delta z(\xi_i)\, z_0'(\xi_i)}{x_0'^2(\xi_i) + y_0'^2(\xi_i) + z_0'^2(\xi_i)} \right] \times [K(t_i) - K(t_{i-1})].$$

En prenant comme précédemment les t_i distincts de a et de b, il restera seulement les termes extrêmes et on aura à la limite

$$\delta = \frac{\Delta x(b)\, x_0'(b) + \Delta y(b)\, y_0'(b) + \Delta z(b)\, z_0'(b)}{x_0'^2(b) + y_0'^2(b) + z_0'^2(b)} [K(b) - K(b-0)]$$
$$+ \frac{\Delta x(a)\, x_0'(a) + \Delta y(a)\, y_0'(a) + \Delta z(a)\, z_0'(a)}{x_0'^2(a) + y_0'^2(a) + z_0'^2(a)} [K(a+0) - K(a)].$$

En définitive *nous obtenons maintenant l'expression suivante de la différentielle d'une fonction de ligne:*

$$(29)\quad \begin{aligned} &\int_a^b [y_0'\Delta z - z_0'\Delta y]\, dp + \int_a^b [z_0'\Delta x - x_0'\Delta z]\, dq + \int_a^b [x_0'\Delta y - y_0'\Delta x]\, dr \\ &\quad + R[x_0'(a)\Delta x(a) + y_0'(a)\Delta y(a) + z_0'(a)\Delta z(a)] \\ &\quad + S[x_0'(b)\Delta x(b) + y_0'(b)\Delta y(b) + z_0'(b)\Delta z(b)], \end{aligned}$$

où $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ sont trois fonctions à variation bornée et où R, S sont deux constantes et où les intégrales sont prises au sens de Stieltjes.

Forme géométrique de la différentielle

14. Cette formule est susceptible d'une interprétation géométrique simple. Appelons λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale au plan T qui passe par la tangente à L_0 en un point P et par le déplacement Δx, Δy, Δz de ce point. Soient Δ_t, Δ_n les composantes de ce déplacement sur la tangente et suivant la normale à L_0 dans T et soient $\Delta\sigma_{yz}$, $\Delta\sigma_{zx}$, $\Delta\sigma_{xy}$ les projections sur les trois plans de coordonnées de l'aire du parallélogramme ayant pour cotés le déplacement $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ de P et un segment unitaire sur la tangente à L_0 en P. On peut écrire la formule (29) en supposant que la variable initiale soit l'arc $s = AP$ de L_0. Seulement p, q, r, R, S ne seront pas nécessairement les mêmes fonctions, ni les mêmes constantes. On voit alors que *l'expression de la différentielle peut aussi s'écrire*

$$(30)\quad \int_0^l \Delta\sigma_{yz}(s)\, d[p_0(s)] + \int_0^l \Delta\sigma_{zx}(s)\, d[q_0(s)] + \int_0^l \Delta\sigma_{xy}(s)\, d[r_0(s)] + R_0\Delta_t(0) + S_0\Delta_t(l)$$

ou encore

$$(30\ bis)\quad \int_0^l \lambda(s)\Delta_n(s)\, d[p_0(s)] + \int_0^l \mu(s)\Delta_n(s)\, d[q_0(s)] + \int_0^l \nu(s)\Delta_n(s)\, d[r_0(s)] + R_0\Delta_t(0) + S_0\Delta_t(l).$$

Cette seconde expression montre que la valeur de la différentielle dépend des valeurs du déplacement normal Δ_n, mais qu'elle ne dépend du déplacement tangentiel Δ_t que par les valeurs de celui ci aux extrémités de la courbe. Ce résultat est d'autant plus intéressant que l'expression de notre différentielle s'applique à un déplacement infiniment petit *ou fini* et non pas seulement à la variation.

On remarquera l'analogie de l'expression (30) avec celle adoptée par M. Volterra pour la dérivée fonctionnelle. Elle s'en distingue d'abord par le fait que les Δ sont relatifs à des déplacements finis et non à des variations et en outre par l'introduction d'intégrales de Stieltjes, qui lui donne une plus grande généralité.

Remarque

15. Il y a lieu d'observer que les fonctions $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ ne sont assujetties à aucune condition analogue à (24). D'une manière précise, nous allons démontrer que *si R, S sont des constantes quelconques et si $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ sont des fonctions quelconques à variation bornée, on peut trouver des fonctions à variation bornée $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ satisfaisant à la condition* (24) *et telles que l'expression* (29) *soit de la forme* (23).* En effet, posons d'abord

$$(31)\quad \begin{aligned} u_3(t) &= \int_a^t z_0'(t)\, d[q(t)] - \int_a^t y_0'(t)\, d[r(t)], \\ v_3(t) &= \int_a^t x_0'(t)\, d[r(t)] - \int_a^t z_0'(t)\, d[p(t)], \\ w_3(t) &= \int_a^t y_0'(t)\, d[p(t)] - \int_a^t x_0'(t)\, d[q(t)]. \end{aligned}$$

Ces intégrales de Stieltjes ont un sens et on démontre—comme au § 12 pour la fonction $F(t)$—qu'elles définissent des fonctions $u_3(t)$, $v_3(t)$, $w_3(t)$ à variation bornée. Posons, pour $a < t < b$, $u(t) = u_3(t)$, $v(t) = v_3(t)$,

* Il faut remarquer que le résultat actuel serait tout aussi exact, si les coefficients de $\Delta x(a)$, $\Delta y(a)$, $\Delta z(a)$, $\Delta x(b)$, $\Delta y(b)$, $\Delta z(b)$ étaient quelconques et non respectivement proportionnels aux dérivées de x, y, z en a et b.

$w(t) = w_3(t)$. Alors non seulement $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ sont définies par ces formules pour $a < t < b$, mais encore aussi $u(a+0)$, $u(b-0)$, $\cdots$, $w(a+0)$, $w(b-0)$. Pour connaître partout u, v, w, il suffit donc de poser encore

$$(32) \qquad \begin{aligned} u(a+0) - u(a) &= Rx_0'(a) + u_3(a+0) - u_3(a), \\ u(b) - u(b-0) &= Sx_0'(b) + u_3(b) - u_3(b-0) \end{aligned}$$

et de même pour v, w. Nous remarquons alors que

$$\begin{aligned} \int_a^b \Delta x(t) \{ d[u(t)] - d[u_3(t)] \} + \int_a^b \Delta y(t) \{ d[v(t)] - d[v_3(t)] \} \\ + \int_a^b \Delta z(t) \{ d[w(t)] - d[w_3(t)] \} \\ = R[x_0'(a)\Delta x(a) + y_0'(a)\Delta y(a) + z_0'(a)\Delta z(a)] \\ + S[x_0'(b)\Delta x(b) + y_0'(b)\Delta y(b) + z_0'(b)\Delta z(b)]. \end{aligned}$$

Pour prouver que l'expression (29) peut se mettre sous la forme (23), il nous suffit donc de démontrer que trois expressions de la forme

$$(33) \quad \int_a^b \Delta x(t)\, d[u_3(t)] - \int_a^b \Delta x(t) z_0'(t)\, d[q(t)] + \int_a^b \Delta x(t) y_0'(t)\, d[r(t)]$$

sont nulles. Or cette dernière est la limite d'une somme telle que

$$(34) \quad \sum_i \Delta x(\xi_i) \left\{ [u_3(t_i) - u_3(t_{i-1})] - z_0'(\xi_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} d[q(t)] + y_0(\xi_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} d[r(t)] \right\}$$

qui est égale d'après (31) à

$$\sum_i \Delta x(\xi_i) \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} [z_0'(t) - z_0'(\xi_i)]\, d[q(t)] - \int_{t_{i-1}}^{t_i} [y_0'(t) - y_0'(\xi_i)]\, d[r(t)] \right\}$$

lequel est en valeur absolue inférieur à

$$N\omega(\epsilon)[Q(b) + R(b)],$$

$Q(b)$ et $R(b)$ étant les variations totales de $q(t)$ et $r(t)$ dans (a, b). Quand le plus grand, ϵ, des intervalles $(t_i - t_{i-1})$ tend vers zéro, cette expression et par suite l'expression (34) tendent vers zéro. Les trois expressions telles que (33) sont bien nulles.

Reste à prouver que les fonctions u, v, w que nous venons de définir satisfont bien à la condition (24) sauf peut-être en un ensemble dénombrable de points. Il suffit évidemment de la prouver pour u_3, v_3, w_3, qui ne diffèrent de u, v, w qu'en deux points. Or la démonstration de la nullité de (33) s'applique évidemment au cas où la limite supérieure de l'intervalle d'intégration

serait t et non b. Elle s'applique quelles que soient les fonctions continues $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$, $\Delta z(t)$. On arrive alors au résultat énoncé en remplaçant dans l'égalité obtenue b par t et Δx, Δy, Δz par x_0', y_0', z_0'.

16. Mais à côté de l'avantage—présenté par la forme (29) de la différentielle sur la forme (23)—que nous venons de mentionner, il faut placer plusieurs inconvénients. D'abord nous avons dû supposer que la courbe L_0 est une courbe rectifiable à tangente continue, tandis que la forme (23) s'applique à une courbe continue quelconque. Et surtout le système des fonctions p, q, r est largement indéterminé pour la différentielle d'une fonction de ligne donnée. Ainsi l'expression (29) garde évidemment la même valeur quand on remplace p, q, r par $p + \rho x$, $q + \rho y$, $r + \rho z$, où ρ désigne une constante quelconque.

Parties régulières et irrégulières de la différentielle

17. Les deux formes précédentes (23) et (29) de la différentielle présentent celle-ci comme un bloc. Il y a avantage àemployer une autre forme qui manifeste l'existence dans la différentielle de parties plus ou moins régulières, plus ou moins simples.

Nous allons donc transformer le résultat précédent en utilisant une décomposition de l'intégrale de Stieltjes en trois parties de complications différentes. C'est cette décomposition à laquelle j'ai fait allusion au § 7 et dont j'ai démontré l'existence et l'unicité au Congrès des Sociétés Savantes tenu à Grenoble en Mai, 1913. J'y ai montré que toute intégrale de Stieltjes

$$\int_a^b x(t)\, d[u(t)]$$

peut se mettre sous la forme suivante

$$\int_a^b x(t)\, d[u(t)] = \sum_n A_n\, x(t_n) + \int_a^b \alpha(t)\, x(t)\, dt + \int_a^b x(t)\, d[\lambda(t)].$$

Pour former cette expression, on forme la " fonction des sauts " de $u(t)$

$$(35)\quad u_1(t) = \sum_{a<t_n\leqq t} [u(t_n) - u(t_n - 0)] + \sum_{a\leqq t_n<t} [u(t_n + 0) - u(t_n)],$$

où les t_n sont les points de discontinuité de $u(t)$. Puis, on pose $u_2(t) = u(t) - u_1(t)$; $u_2(t)$ est une fonction continue à variation bornée; elle a donc une dérivée presque partout; on prendra pour $\alpha(t)$ la valeur de cette dérivée là où elle existe et une valeur finie quelconque, par exemple zéro, ailleurs. La fonction $\alpha(t)$ sera donc sommable. Enfin, on posera

$$\lambda(t) = u_2(t) - \int_a^t \alpha(t)\, dt;$$

la fonction $\lambda(t)$ sera continue à variation bornée et elle aura presque partout une dérivée nulle. D'autre part, A_n est le saut de $u(t)$ au point t_n.

18. En opérant de même pour v et w, *on voit que la différentielle d'une fonction de ligne quelconque peut se mettre sous la forme suivante*

$$
\begin{aligned}
T_{\Delta x,\, \Delta y,\, \Delta z} = & \int_a^b \{ \Delta x(t)\, \alpha(t) + \Delta y(t)\, \beta(t) + \Delta z(t)\, \gamma(t) \}\, dt \\
& + \sum_n \{ A_n \Delta x(t_n) + B_n \Delta y(t_n) + C_n \Delta z(t_n) \} \\
& + \left[\int_a^b \Delta x(t)\, d[\lambda(t)] + \int_a^b \Delta y(t)\, d[\mu(t)] \right. \\
& \left. + \int_a^b \Delta z(t)\, d[\nu(t)] \right].
\end{aligned}
\tag{36}
$$

On voit de suite que cette formule diffère des formules ordinaires du Calcul des Variations non seulement en ce que les fonctions x, y, z, y entrent par leur accroissement et non par leur " variation " mais en ce qu'en outre elle comprend d'autres termes en dehors de l'intégrale ordinaire et des termes aux limites.

19. Nous devons remarquer que les trois termes du second membre de l'expression précédente peuvent aussi s'écrire, en posant

$$u_0(t) = \int_a^t \alpha(t)\, dt$$

et en raisonnant pour v, w comme pour $u(t)$, sous la forme d'intégrales de Stieltjes:

$$
\begin{aligned}
& \int_a^b \{ \Delta x(t)\, d[u_0(t)] + \Delta y(t)\, d[v_0(t)] + \Delta z(t)\, d[w_0(t)] \}, \\
& \int_a^b \{ \Delta x(t)\, d[u_1(t)] + \Delta y(t)\, d[v_1(t)] + \Delta z(t)\, d[w_1(t)] \}, \\
& \int_a^b \{ \Delta x(t)\, d[\lambda(t)] + \Delta y(t)\, d[\mu(t)] + \Delta z(t)\, d[\nu(t)] \}.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Nous allons montrer que *la condition* (23) *applicable à la somme des trois termes précédent, s'applique aussi à chacun d'eux séparément, et qu'elle prend une forme particulièrement simple.*

20. On a en effet d'après (24)

$$K(t) = \text{une certaine constante } k,$$

sauf peut-être en un ensemble dénombrable de points. Dès lors on a *partout*

$$K(t \pm 0) = k, \tag{38}$$

et, d'après (22),

$$
\begin{aligned}
0 = x_0'(t)[u(t+0) - u(t-0)] + y_0'(t)[v(t+0) - v(t-0)] \\
+ z_0'(t)[w(t+0) - w(t-0].
\end{aligned}
$$

En écrivant cette égalité pour les points t_n—pour les autres, elle est évidente —*on aura*

(39) $$A_n x_0'(t_n) + B_n y_0'(t_n) + C_n z_0'(t_n) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

pourvu toutefois que t_n soit distinct de a et de b.

Or on a d'après (35)

$$\int_a^t x_0' \, d[u_1(t)] = x_0'(t)[u(t) - u(t-0)] + \sum_{a<t_n<t} A_n x_0'(t_n) + x_0'(a)[u(a+0) - u(a)]$$

et de même d'après (22), (38), et (39)

(40) $$\int_a^t [x_0' \, du_1 + y_0' \, dv_1 + z_0' \, dw_1] = K(t) - K(a) = K(t),$$

puisque $K(a)$ est évidemment nul. On voit donc que la condition analogue à (24) est bien vérifiée pour le second terme de (37). De plus, *elle résulte des relations simples* (39) qui la remplacent.

21. Mais, en remplaçant, dans (40), $K(t)$ par son expression, il reste

(41) $$\int_a^t [x_0' \, du_2 + y_0' \, dv_2 + z_0' \, dw_2] = 0,$$

et ceci pour toute valeur de t. Or soit $U_2(t)$ la variation totale de $u_2(t)$ de a à t. Les fonctions $u_2(t)$ et $U_2(t)$ sont à variation bornée et continues. Elles sont donc dérivables presque partout. Si t_0 est un point où elles sont toutes deux dérivables et si l'on écrit la formule analogue à (17) divisée par $t' - t_0$

$$\left| \frac{\int_{t_0}^{t'} x_0'(t) \, d[u_2(t)]}{t' - t_0} - x_0'(t_0) \frac{u_2(t') - u_2(t_0)}{t' - t_0} \right| < \Omega(\epsilon) \left| \frac{U_2(t') - U_2(t_0)}{t' - t_0} \right|,$$

on voit en passant à la limite que la fonction

$$\int_a^t x_0'(t) \, d[u_2(t)]$$

a une dérivée au point t_0 égale à $x_0'(t_0)$ multipliée par $d[u_2(t_0)]/dt_0$. En opérant de même pour v_2 et w_2 et se souvenant de la définition de α, β, γ, on voit que le premier membre de (41) a presque partout une dérivée égale à $x_0'(t)\alpha(t) + y_0'(t)\beta(t) + z_0'(t)\gamma(t)$. Comme le second membre est nul, *on a en définitive presque partout*

(42) $$x_0'(t)\,\alpha(t) + y_0'(t)\,\beta(t) + z_0'(t)\,\gamma(t) = 0.$$

On peut même supposer que cette égalité a lieu partout en changeant au besoin les valeurs de $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ sur un ensemble de points de mesure nulle, ce qui n'altérera pas la formule (36). Si par exemple u_2, v_2, w_2 ont des dérivées continues partout, α, β, γ seront égaux à ces dérivées et l'équation (42) ayant lieu presque partout aura lieu nécessairement partout. D'ailleurs si l'on intégre (42) de a à t, en remarquant que

$$u_0(t) = \int_a^t \alpha(t)\,dt, \qquad v_0(t) = \int_a^t \beta(t)\,dt, \qquad w_0(t) = \int_a^t \gamma(t)\,dt,$$

on voit qu'on aura partout

$$(43) \quad \int_a^t x_0'(t)\,d[u_0(t)] + y_0'(t)\,d[v_0(t)] + z_0'(t)\,d[w_0(t)] = 0.$$

Donc la condition (24) s'applique aussi au premier terme de (37). *Et elle se traduit par la condition plus simple* (42). Enfin en retranchant (43) de (41), on voit que la condition (24) s'applique aussi au troisième terme de (37), car on obtient partout

$$(44) \quad \int_a^t x_0'(t)\,d[\lambda(t)] + y_0'(t)\,d[\mu(t)] + z_0'(t)\,d[\nu(t)] = 0.$$

Autre forme de la différentielle

22. L'expression (36) de la différentielle de U_L contient des constantes et des fonctions liées par les relations (39), (42) et (44). On peut alors en déduire une nouvelle forme de la différentielle où l'on a tenu compte d'avance de ces relations. Cette forme sera à la forme (36) ce qu'est la forme (29) à la forme (23). Nous ferons donc la même hypothèse que pour (29), à savoir que L_0 est rectifiable et à tangente continue.

Étant donnée la relation (39), on peut toujours choisir des constantes P_n, Q_n, R_n, telles que l'on ait

$$(45) \quad \begin{gathered} A_n = Q_n z_0'(t_n) - R_n y_0'(t_n), \qquad B_n = R_n x_0'(t_n) - P_n z_0'(t_n), \\ C_n = P_n y_0'(t_n) - Q_n x_0'(t_n). \end{gathered}$$

Par suite le second terme de la différentielle (36) devient

$$(46) \quad \begin{aligned} \sum_n \{ & P_n[y_0'(t_n)\Delta z(t_n) - z_0'(t_n)\Delta y(t_n)] \\ & + Q_n[z_0'(t_n)\Delta x(t_n) - x_0'(t_n)\Delta z(t_n)] \\ & + R_n[x_0'(t_n)\Delta y(t_n) - y_0'(t_n)\Delta x(t_n)]\}, \end{aligned}$$

où t_n est distinct de a et de b et *auquel il faut ajouter un terme de la forme*

$$(47)\quad A\Delta x(a) + B\Delta y(a) + C\Delta z(a) + A'\Delta x(b) + B'\Delta y(b) + C'\Delta z(b),$$

les relations (39) n'ayant pas lieu nécessairement aux extrémités.

De même, la relation (42) permet de choisir des fonctions sommables $P(t), Q(t), R(t)$ telles que l'on ait presque partout

$$\alpha(t) = Q(t)z_0'(t) - R(t)y_0'(t), \qquad \beta(t) = R(t)x_0'(t) - P(t)z_0'(t),$$
$$\gamma(t) = P(t)y_0'(t) - Q(t)x_0'(t).$$

Il nous suffit de prendre par exemple

$$P = \frac{\gamma y_0' - \beta z_0'}{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}, \qquad Q = \frac{\alpha z_0' - \gamma x_0'}{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}, \qquad R = \frac{\beta x_0' - \alpha y_0'}{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}.$$

On peut supposer—en prenant au besoin pour variable t l'arc de la courbe—que $x'^2 + y'^2 + z'^2$ reste partout supérieur à un nombre $h > 0$, de sorte que P, Q, R sont bien sommables. Alors le *premier terme de la différentielle* (26) *peut s'écrire*

$$\int_a^b \{P(t)[y_0'(t)\Delta z(t) - z_0'(t)\Delta y(t)] + Q(t)[z_0'(t)\Delta x(t) - x_0'(t)\Delta z(t)]$$
$$+ R(t)[x_0'(t)\Delta y(t) - y_0'(t)\Delta x(t)]\}\,dt.$$

On retrouve ainsi l'expression qui constitue,—après remplacement des accroissements de x, y, z par leurs "variations,"—la dérivée fonctionnelle au sens de M. Volterra. Mais nous voyons qu'il s'y ajoute des termes d'espèce différentes, les termes (46), (47) et ceux qui résultent de la transformation, que nous allons opérer, du troisième terme de (36). Il nous suffit d'appliquer à ce troisième terme la transformation même qui a été appliquée dans le § 13 à la différentielle tout entière prise sous la forme (23). Seulement, nous remarquons que la fonction qui remplace $K(t)$ est d'après (44) *partout* égale à zéro. De sorte que l'expression qui correspond au δ du § 13 est cette fois nulle. D'autre part, les fonctions qui correspondent à $p(t), q(t), r(t)$ s'obtenant en remplaçant dans les formules (25) $u(t), v(t), w(t)$ par $\lambda(t), \mu(t), \nu(t)$ non seulement seront à variation bornée mais encore seront continues et avec une dérivée nulle presque partout. La démonstration de ce fait est identique aux démonstrations analogues des §§ 12 et 21.

En résumé, on voit *que pour toute courbe L_0 rectifiable à tangente continue, on peut mettre la différentielle d'une fonction de ligne U_L sous la forme*

$$
(48)\quad
\begin{aligned}
&\int_a^b \{ (P(t) [y_0'(t) \Delta z(t) - z_0'(t) \Delta y(t)] \\
&+ Q(t) [z_0'(t) \Delta x(t) - x_0'(t) \Delta z(t)] \\
&+ R(t) [x_0'(t) \Delta y(t) - y_0'(t) \Delta x(t)] \} dt \\
&+ \int_a^b [y_0'(t) \Delta z(t) - z_0'(t) \Delta y(t)] \, d [X(t)] \\
&+ \int_a^b [z_0'(t) \Delta x(t) - x_0'(t) \Delta z(t)] \, d [Y(t)] \\
&+ \int_a^b [x_0'(t) \Delta y(t) - y_0'(t) \Delta x(t)] \, d [Z(t)] \\
&+ \sum_n \{ P_n [y_0'(t_n) \Delta z(t_n) - z_0'(t_n) \Delta y(t_n)] \\
&+ Q_n [z_0'(t_n) \Delta x(t_n) - x_0'(t_n) \Delta z(t_n)] \\
&+ R_n [x_0'(t_n) \Delta y(t_n) - y_0'(t_n) \Delta x(t_n)] \} \\
&+ A\Delta x(a) + B\Delta y(a) + C\Delta z(a) \\
&+ A' \Delta x(b) + B' \Delta y(b) + C' \Delta z(b) ,
\end{aligned}
$$

où les A, B, C, A', B', C', P_n, Q_n, R_n sont des constantes quelconques, où les t_n sont des points fixes distincts des extrémités, où $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ sont des fonctions sommables dans (a, b) et où $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ sont des fonctions continues à variation bornée et qui admettent presque partout une dérivée première nulle.

Transformation de la différentielle en intégrale de M. Lebesgue

23. On peut enfin transformer l'expression de la différentielle de façon à éliminer les intégrales de Stieltjes. Il suffit pour cela d'employer une méthode appliquée par M. Lebesgue* au cas d'une seule intégrale de Stieltjes. Je crois utile de développer cette méthode dans le cas un peu plus général actuel parce que M. Lebesgue n'est pas entré dans tous les détails et surtout parce que l'artifice analytique qu'il emploie parait assez subtil, tandis que dans le cas actuel il apparait sous une forme géométrique très naturelle.

Nous supposons seulement sur la courbe L_0 qu'elle est continue et nous partons de l'expression

$$
(49)\quad T_{\Delta x,\, \Delta y,\, \Delta z} = \int_a^b \Delta x(t) \, d[u(t)] + \int_a^b \Delta y(t) \, d[v(t)] + \int_a^b \Delta z(t) \, d[w(t)]
$$

*Comptes Rendus t. 150 (1910), p. 86–88.

de la différentielle. Il s'agit d'effectuer sur cet intégrale de Stieltjes de simples changements de variables qui la ramènent à une intégrale ordinaire ou plus exactement à une intégrale de Lebesgue. Il y a lieu de modifier—très légèrement—la démonstration de M. Lebesgue, qui s'applique à chaque intégrale séparément, de façon à employer le même changement de variable pour les trois intégrales.

Tout d'abord, d'après la définition des intégrales de Stieltjes, on sait qu'on peut modifier u, v, w en un ensemble dénombrable de valeurs de t (autres que a et b) sans changer la valeur de l'intégrale. *Nous pourrons donc supposer que $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ sont partout continues à droite,*—sauf peut-être pour $t = a$.

Nous allons—opérant un peu différemment de M. Lebesgue—employer deux changements de variable successifs sur t, le changement intermédiaire donnant déjà un résultat qui peut être utile. Soit Σk_n une série convergente quelconque à termes positifs. Posons

$$\varphi(a) = a, \qquad \varphi(t) = t + \sum_{t_n \leqq t} k_n \qquad (a < t \leqq b),$$

où les t_n sont les points de discontinuité des fonctions u, v, w. La fonction $\varphi(t)$ est une fonction croissante qui n'est discontinue qu'aux points t_n. Soit maintenant $\theta(T)$ la borne inférieure des valeurs de t telles que $\varphi(t) \geqq T$. En posant $B = \varphi(b)$, on voit que $\theta(T)$ est une fonction continue non décroissante pour $a \leqq T \leqq B$. De plus $\theta(T)$ prend la valeur t_n pour $\varphi(t_n - 0) \leqq T \leqq \varphi(t_n)$. Nous ferons d'abord dans la formule (49) le changement de variable $t = \theta(T)$, mais avec une petite modification.

Appelons $\mathbf{U}(T)$, $\mathbf{V}(T)$, $\mathbf{W}(T)$ les fonctions définies de la manière suivante. Nous remarquons que si t croît de a à b, $\varphi(t)$ croît de a à B, mais il est discontinu aux points t_n de sorte que

$$\varphi(t_n - 0) < \varphi(t_n) = \varphi(t_n + 0)$$

(si l'un des t_n est égal à a, on a au contraire $\varphi(a) < \varphi(a + 0)$. Quand T n'est pas dans un de ces intervalles exceptionnels nous poserons

$$\mathbf{U}(T) = u[\theta(T)], \qquad \mathbf{V}(T) = v[\theta(T)], \qquad \mathbf{W}(T) = w[\theta(T)].$$

Si au contraire, on a par exemple $\varphi(t_n - 0) \leqq T \leqq \varphi(t_n)$, on a $\theta(T) = t_n$, d'où $u[\theta(T)] = u(t_n)$. Dans ce cas, on prendra pour $\mathbf{U}(T)$ par exemple non $u(t_n)$ mais une fonction linéaire entre $T_n' = \varphi(t_n - 0)$ et $T_n = \varphi(t_n)$, prenant aux extrémités les valeurs $\mathbf{U}(T_n') = u(t_n - 0)$, $\mathbf{U}(T_n) = u(t_n)$; et de même pour $\mathbf{V}(T)$, $\mathbf{W}(T)$.

On démontre alors facilement que la différentielle (49) peut s'écrire sous la forme d'une somme d'intégrales de Stieltjes

$$T_{\Delta x,\,\Delta y,\,\Delta z} = \int_a^B \Delta x\,[\,\theta(T)\,]\,d[\,\mathbf{U}(T)\,] + \int_a^B \Delta y\,[\,\theta(T)\,]\,d[\,\mathbf{V}(T)\,] + \int_a^B \Delta z\,[\,\theta(T)\,]\,d[\,\mathbf{W}(T)\,], \tag{50}$$

où $\mathbf{U}(T)$, $\mathbf{V}(T)$, $\mathbf{W}(T)$ *sont des fonctions continues et à variation bornée et où* $\theta(T)$ *est une fonction continue non décroissante, ces quatre fonctions restant indépendantes de* Δx, Δy, Δz.

On voit qu'on a ainsi simplifié d'une part l'expression (49) en remplaçant les fonctions u, v, w par des fonctions de même nature mais continues, et qu'on l'a compliqué d'autre part par l'introduction de la fonction $\theta(T)$, qui peut être constante dans certains intervalles.

24. Considérons $\mathbf{U}(T)$, $\mathbf{V}(T)$, $\mathbf{W}(T)$ comme les coordonnées d'un point variable; ce point décrit une courbe rectifiable continue Γ. *Mis sous forme géométrique, en passant d'une à trois coordonnées, l'artifice de M. Lebesgue consiste au fond à prendre comme nouvelle variable l'arc de cette courbe* et paraît maintenant s'imposer. Comme il pourrait arriver que $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ fussent en même temps constants dans un même intervalle, cette circonstance nous oblige à préciser la substitution adoptée. Appelons $\Psi(T)$ l'arc de la courbe Γ de a à T. $\Psi(T)$ est une fonction continue non décroissante. Soit $\Sigma = \Psi(B)$; c'est la longueur de la courbe Γ. Nous appellerons $\psi(\sigma)$ la borne inférieure des valeurs de T telles que $\Psi(T) \geqq \sigma$ et nous poserons

$$\Phi(\sigma) = \theta[\,\psi(\sigma)\,]; \qquad \mathbf{A}_1(\sigma) = \mathbf{U}[\,\psi(\sigma)\,]; \qquad \mathbf{B}_1(\sigma) = \mathbf{V}[\,\psi(\sigma)\,];$$
$$\mathbf{C}_1(\sigma) = \mathbf{W}[\,\psi(\sigma)\,].$$

On voit alors comme au paragraphe précédent, que la différentielle (49) peut s'écrire sous la forme

$$T_{\Delta x,\,\Delta y,\,\Delta z} = \int_0^\Sigma \Delta x\,[\,\Phi(\sigma)\,]\,d[\,\mathbf{A}_1(\sigma)\,] + \int_0^\Sigma \Delta y\,[\,\Phi(\sigma)\,]\,d[\,\mathbf{B}_1(\sigma)\,] + \int_0^\Sigma \Delta z\,[\,\Phi(\sigma)\,]\,d[\,\mathbf{C}_1(\sigma)\,]. \tag{51}$$

Or $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{C}_1$ sont évidemment des fonctions continues à variation bornée et à nombres dérivés bornés. Elles ont donc presque partout chacune une dérivée, et même il existe un ensemble E de valeurs de σ de mesure Σ dans l'intervalle $(0, \Sigma)$ où les dérivées de $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{C}_1$ existent et où la somme de leurs carrés est égale à 1. Définissons alors des fonctions $\mathbf{A}(\sigma)$, $\mathbf{B}(\sigma)$, $\mathbf{C}(\sigma)$ égales aux dérivées respectives de $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{C}_1$ en chaque point de E et égales à $1/\sqrt{3}$

partout ailleurs. On aura alors quel que soit σ dans l'intervalle $(0, \sigma)$

$$(52) \quad \begin{gathered} \mathbf{A}_1(\sigma) = \int_0^\sigma \mathbf{A}(\sigma)\, d\sigma, \quad \mathbf{B}_1(\sigma) = \int_0^\sigma \mathbf{B}(\sigma)\, d\sigma, \quad \mathbf{C}_1(\sigma) = \int_0^\sigma \mathbf{C}(\sigma)\, d\sigma, \\ [\mathbf{A}(\sigma)]^2 + [\mathbf{B}(\sigma)]^2 + [\mathbf{C}(\sigma)]^2 = 1. \end{gathered}$$

Les fonctions $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ étant sommables, $\Delta x[\Phi(\sigma)]$, $\Delta y[\Phi(\sigma)]$, $\Delta z[\Phi(\sigma)]$ étant mesurables et bornées, l'intégrale

$$(53) \quad \int_0^\Sigma \{\Delta x[\Phi(\sigma)]\mathbf{A}(\sigma) + \Delta y[\Phi(\sigma)]\mathbf{B}(\sigma) + \Delta z[\Phi(\sigma)]\mathbf{C}(\sigma)\}\, d\sigma$$

a un sens. Nous allons montrer qu'elle est égale au second membre de (51). Nous considérerons dans ce but les fonctions $\mathbf{F}(\sigma)$, $\mathbf{G}(\sigma)$ de σ obtenues en remplaçant dans (51) et (53) les limites supérieures d'intégration par σ. La seconde a comme on sait l'élément d'intégration pour dérivée presque partout. Un raisonnement analogue à celui de § 21 démontre que la première a la même dérivée en tout point où $\Delta x[\Phi(\sigma)]$, $\Delta y[\Phi(\sigma)]$, $\Delta z[\Phi(\sigma)]$ sont continues et où $\mathbf{A}_1(\sigma)$, $\mathbf{B}_1(\sigma)$, $\mathbf{C}_1(\sigma)$ et leurs variations totales ont une dérivée, c'est à dire aussi, presque partout. Ainsi $[\mathbf{F}(\sigma) - \mathbf{G}(\sigma)]$ a une dérivée nulle presque partout. On voit facilement que les nombres dérivés à droite de $\mathbf{F}(\sigma)$ et $\mathbf{G}(\sigma)$ sont bornés; donc aussi ceux de $\mathbf{F}(\sigma) - \mathbf{G}(\sigma)$. Par suite $\mathbf{F}(\sigma) - \mathbf{G}(\sigma)$ est l'intégrale indéfinie d'un de ces nombres dérivés là où il existe et comme il est nul presque partout, $\mathbf{F}(\sigma) - \mathbf{G}(\sigma)$ est une constante. Cette constante est nulle pour $\sigma = 0$. On a bien enfin $\mathbf{F}(\sigma) = \mathbf{G}(\sigma)$. En définitive, *la différentielle d'une fonction de ligne peut se mettre pour une ligne continue quelconque sous la forme d'une intégrale de Lebesgue:*

$$(54) \quad T_{\Delta x, \Delta y, \Delta z} = \int_0^\Sigma \{\Delta x[\Phi(\sigma)]\mathbf{A}(\sigma) + \Delta y[\Phi(\sigma)]\mathbf{B}(\sigma) + \Delta z[\Phi(\sigma)]\mathbf{C}(\sigma)\}\, d\sigma,$$

où $\Phi(\sigma)$ *est une fonction non décroissante, où* $\mathbf{A}(\sigma)$, $\mathbf{B}(\sigma)$, $\mathbf{C}(\sigma)$ *sont des fonctions sommables bornées, et où ces quatre fonctions sont indépendantes de* Δx, Δy, Δz.

25. Seulement, il faut remarquer qu'on n'obtiendra pas une forme admissible de la différentielle en choisissant pour $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ des fonctions sommables bornées arbitraires. Ces fonctions dérivent en effet, par une suite d'opérations déterminées, des fonctions u, v, w lesquelles doivent vérifier une certaine condition. Lorsque la courbe L_0 est rectifiable et à tangente continue, cette condition s'exprime sous la forme (24). Il n'est pas nécessaire d'obtenir la relation correspondante entre $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ pour transformer l'expression (55) sous une forme ne faisant intervenir que des fonctions sommables et bornées arbitraires.

Il nous suffit en effet d'utiliser le procédé qui nous a permis de passer de la forme (49) à la forme (54) et de l'appliquer à la forme explicite (29).

On voit alors que *pour une courbe rectifiable à tangente continue la différentielle peut se mettre sous la forme de la somme d'un terme fini et d'une intégrale de Lebesgue*

$$T_{\Delta x,\,\Delta y,\,\Delta z} = \int_0^H \{ [y_0'[\Theta(\sigma)]\Delta z[\Theta(\sigma)] - z_0'[\Theta(\sigma)]\Delta y[\Theta(\sigma)]] P(\sigma)$$

$$+ [z_0'[\Theta(\sigma)]\Delta x[\Theta(\sigma)] - x_0'[\Theta(\sigma)]\Delta z[\Theta(\sigma)]] Q(\sigma)$$

$$+ [x_0'[\Theta(\sigma)]\Delta y[\Theta(\sigma)] - y_0'[\Theta(\sigma)]\Delta x[\Theta(\sigma)]] R(\sigma) \} \, d\sigma$$

$$+ R[x_0'(a)\Delta x(a) + y_0'(a)\Delta y(a) + z_0'(a)\Delta z(a)]$$

$$+ S[x_0'(b)\Delta x(b) + y_0'(b)\Delta y(b) + z_0'(b)\Delta z(b)]$$

où $\Theta(\sigma)$ est une fonction non décroissante, $P(\sigma)$, $Q(\sigma)$, $R(\sigma)$ sont des fonctions sommables bornées, R, S, H sont des constantes, et où ces fonctions et ces constantes sont indépendantes de Δx, Δy, Δz.

POITIERS,
le 16 *Mai* 1913.
